DENKLEM DÜZENEKLERI[1]

Dizey kuramının önemli bir kullanım alanı doğrusal denklem düzeneklerinin çözümüdür.

2.1. Doğrusal düzenekler

Doğrusal denklem düzeneği (n denklem n bilinmeyen)

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\
&\dots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Eğer tüm b_i ler sıfır ise düzenek türdeştir (homogeneous). Dizeyler kullanılarak denklem düzeneği

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

olarak yazılabilir. Burada **A** bilinen a_{ij} katsayılarını içeren nxn boyutlu dizey, **x** ise nx1 boyutlu bilinmeyenler dizeyi ve **b** b_{ij} leri içeren nx1 boyutlu dizeydir.

2.2. Gauss eleme yöntemi

Çözümü bulmak için denklem düzeneği olabildiğince basit bir biçime sokulmaya çalışılır.
Gaus eleme yöntemi en yaygın kullanılan yöntemlerdendir ve temel işlemleri kullanır,
Herhangi iki satır (denklem) yer değiştirebilir,
Sıfır dan farklı bir sabit ile çarpılır,
Bir satırın katı diğer satıra eklenir,
Buradaki amaç düzeneği üçgen biçime sokmaktır. Her aşamada elde edilen düzenek birbirine eşdeğerdir yani çözümü sağlayan x_{ij} ler aynıdır.

Örnek:
Denklemlerimiz aşağıdaki gibi olsun

$$
\begin{aligned}
2x+z &= 2 \\
x+y &= 3 \\
3x+2y+z &= 1
\end{aligned}
$$

Denklem düzeneğini **A** ve **b** olarak yazalım. Satırların yer değiştirmesi sonucu değiştirmeyecektir,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

[1] Bu ders notuna http://jeofizik.comu.edu.tr/ sayfasından ulaşabilirsiniz.

önce 1. Satırı (-2) ile çarpalım ve 2. Satıra ekleyelim, sonra gene 1. satırı bu sefer (-3) ile çarpalım ve 3. Satıra ekleyelim bu işlemlerle a(2,1) ve a(3,1). Elemanlar sıfır değeri alır;

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -8 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) =$$

işlem kolaylığı için 2. ve 3. Satırları yer değiştirelim ve 2. Satırı (2) ile çarpıp 3. Satıra ekleyelim. A(3,2) elemanı sıfır olacaktır. Son durumda **A** dizeyi üçgen dizey halini almış olur.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 12 \end{array}\right)$$

bu son düzenektende

z	=	-12
y-z	=	8 => y=-4
x+y	=	3 => x=7

Sonuçlarına ulaşılır.

Uygulama

1. Gauss eleme yöntemi için bir bilgisayar programı yazınız. Denklem sayısı =4, bilinmeyen sayısı = 4 alın.

Önerilen adımlar

a- katsayılar (A) ve sonuç (B) dizeylerini birleştirin ve genişletilmiş A dizeyini elde edin (A|B)

b- asıl köşegenleri (a_{11} a_{22} a_{33} ...) deneteleyerek 0 olanları belirleyin ve alt veya üst satırla toplayarak 0 dan farklı hale getirin

c- 1 satırın tamaını a_{11} ‘e bölerek a_{11} in değerini 1 yapın

d- ikinci satırın ilk elemanı ile birinci satırı çarpıp 2 satırdan çıkarın

$a_{2j}= a_{2j} - a_{1j}*a_{21}$

bu işlem 2. satırın ilk elemanını 0 yapacaktır.

e- Aynı işlemi diğer satırlar için de yaparak ilk sutunda a_{11} hariç diğer elemaları 0 yapın

$a_{ij}= a_{ij} – a_{1j}*a_{ii}$

f- Bu işlemden sonra alt satıra geçerek c-e arası işlemleri burası için tekrarlayın

$a_{ij}= a_{ij}/ a_{ii}$

$a_{ij}= a_{ij} – a_{kj}*a_{ii}$

...

Dizeyin tersi

n x *n* boyunda **A** dizeyinin tersi *n* x *n* boyutunda başka bir dizeydir ve $\mathbf{A}^{-1}$ ile verilir. Iki dizey arasında

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

ilişkisi vardır. Doğrusal denklem düzeneğinin

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

çözümü için eşitliğin her iki tarafını **A** nın tersi ile çarpalım (çarpım yönü önemlidir!!!)

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ işlemi **I**, birim dizeye eşittir. Birim dizey ile çarpım dizeyin kendisini vereceğinden

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

ile yazılabilir,

Çarpımların tersi, ters sırada terslerin çarpımına eşittir.

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Dizeyin tersi **Gauss-Jordan eleme** yöntemi ile bulunabilir. Gauss-Jordan eleme yöntemi Gauss eleleme yöntemine benzerdir, fakat bu sefer amaç köşegen dizey elde etmektir.

<u>Örnek:</u> Gauss-Jordan eleme yöntemi ile tersini bulalım

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bu sefer **b** dizeyi yerine birim dizey yazılır

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =$$

temel işlemler yardımı ile **A** dizeyi köşeğen yapılır

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

A dizeyi birim dizey biçimi aldığında başlangıçta birim dizey olan ek dizey A dizeyinin tersi olacaktır

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

bu sonucun doğru olup olmadığı

$\mathbf{A^{-1}A=I}$

işlemi ile denetlenir.

3.1. Determinant Yardımı Ile Bir Dizeyin Tersini Bulma

Bir dizeyin tersini bulmak için determinant işleminden yararlanılabilir.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[C_{jk}]^T$$

burada C_{jk} a_{jk} için cofactor dur. buradan da

$\det \mathbf{A} \neq 0$

koşulu sağlanıyorsa A^{-1} elde edilebilir.

3.2. Cramer Kuralı

$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1+a_{22}x_2 = b_2$

Düzeneğinin çözümüne bakalım. Çözüm

$$x_1 = (b_1 a_{22} - b_2 a_{12})/(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$
$$x_2 = (b_2 a_{11} - b_1 a_{21})/(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})$$

Ile verilebilir

$$x_1 = D_1/D$$
$$x_2 = D_2/D$$

Tanımları yapalım burada

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ve D_i tanımları ise

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

ile verilir. i D içinde hangi sutunun bn ile yer değiştireceğini göstermektedir. Bu yöntem Cramer kuralı olarak bilinir. Eğer determinant sıfır dan farklı ise çözüm bulunacaktır

$$x_1 = D_1/D, \qquad x_2 = D_2/D \qquad \ldots \qquad x_n = D_n/D$$

burada D_i D nin i. sutununu $b_1,\ldots,b_n$ ile yerdeğiştirdikten sonra hesaplanan determinanttır.

Hatırlatma: eğer düzenek türdeş (homogeneous) ise ve $D \neq 0$ çözüm yoktur.

<u>Örnek:</u>

$2x+z = 2$
$x+y = 3$
$3x+2y+z = 1$

Buradan

$$D = \det \mathbf{A} = 1$$

ve

$$(x =) \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$(y =) \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$(z =) \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

bulunur. Sonuçlar Gauss -Jordan yöntemiyle elde edilen sonuçların aynısıdır.

Uygulama

1. Bir (MxM) dizeyin
   a- Gauss-Jordan eleme yöntemini kullanarak tersini bulan programı yazın.
   b- Doğruluğunu gösterin.
2. Aşağıda verilen 2x2 dizeyin tersini bulun

1	2
-3	-6