DERS 2

Çok Değişkenli Doğrusal Denklem Sistemleri

Gauss-Jordan Yoketme Yöntemi

1.1. Çok Değişkenli Doğrusal Denklem Sistemleri. Daha önce de belirttiğimiz üzere, iki değişkenli iki denklemden oluşan denklem sistemleri düşünebileceğimiz gibi değişken sayısı ve denklem sayısı ikiden fazla olan doğrusal denklem sistemleri de düşünebiliriz. Gerçekten, günlük hayatta karşımıza çıkan problemlerden pek çoğu çok değişkenli doğrusal denklemlerden oluşan denklem sistemleri ile modellenebilir.

Bundan böyle tartışmalarımızı çok değişkenli doğrusal denklem sistemleri üzerinde yürüteceğiz.

Değişken sayısı üç veya daha az ise, değişkenler için genellikle x, y, z harfleri kullanılmakla beraber, tartışmaları en genel biçimde yapmak için değişkenleri numaralamak daha elverişli olmaktadır: $x_1, x_2, x_3, \ldots$ gibi.

Tanım 1. $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathrm{R}$ olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

ifadesine bir n-**değişkenli doğrusal denklem** denir. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarına denklemin **katsayı**ları, b sayısına da **sağ taraf sabiti** denir.

Tanım 2. Verilen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sayıları için $a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n = b$ ise, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ sıralı n-lisine $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ denkleminin bir **çözüm**ü denir.

Tanım 3. a_{ij} , b_i , $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ olmak üzere n değişkenli m denklemden oluşan

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

denklemler topluluğuna bir **doğrusal denklem sistemi** denir. a_{ij} sayılarına sistemin **katsayıları,** b_i sayılarına da **sağ taraf sabitleri** denir.

n-değişkenli bir doğrusal denklem sisteminin bir **çözüm**ü denince, o sistemdeki denklemlerden her birinin çözümü olan bir sıralı reel sayı n-lisi anlaşılır.

Tanım 4. Çözüm kümeleri aynı olan iki doğrusal denklem sistemine **denk** sistemler denir.

İki değişkenli doğrusal denklem sistemleri için gördüğümüz yoketme yöntemi, daha çok değişkenli doğrusal denklem sistemleri için de aynen geçerlidir. Bir denklem sistemini çözmek için aşağıdaki teoremde ifade edilen A, B, C işlemleri kullanılarak o sisteme denk ancak çözümü daha kolay bir takım denklem sistemleri zinciri elde edilerek adım adım çözüme ulaşılır.

Teorem. Aşağıdaki işlemlerden her biri, uygulandığı bir denklem sistemini ona denk olan bir denklem sistemine dönüştürür:

A. İki denklemin yerini değiştirmek.

B. Bir denklemi sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak.

C. Bir denklemin bir sabitle çarpımını başka bir denkleme (taraf – tarafa) toplamak.

İki değişkenli doğrusal denklem sistemleri için gözlemlediğimiz, doğrusal denklem sistemleri ile matrisler arasındaki ilişki, çok değişkenli doğrusal denklem sistemleri için de geçerlidir. n-değişkenli m denklemden ibaret olan

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

doğrusal denklem sisteminin katsayıları ve sağ taraf sabitlerinden oluşan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

matrisine bu sistemin **ilaveli matris**i denir. Dikkât edilirse, n-değişkenli m denklemden oluşan sistemin ilaveli matrisi bir $m{\times}(n{+}1)$ matristir. Son sütundan önceki düşey çizgi, sağ taraf sabitlerini diğer girdilerden ayırmak için konmuştur.

Bir doğrusal denklem sisteminin, ilaveli matrisince tamamen belirlendiğine dikkat ediniz.

Bu noktada, okuyucunun ilaveli matrisi verilen bir denklem sistemini veya verilen bir doğrusal denklem sisteminin ilaveli matrisini yazmak hususunda birkaç alıştırma yapması yararlı olacaktır.

Doğrusal denklem sistemlerini yoketme yöntemi ile çözerken yukarda ifede ettiğimiz teoremdeki işlemleri uygularız. Bu işlemler bir doğrusal denklem sistemine uygulandığında, o sistemin ilaveli matrisi üzerinde, sırasıyla, aşağıdaki **satır işlemleri**ne karşılık gellirler:

- İki satırın yerini değiştirmek.
- Bir satırı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak.
- Bir satırın bir sabitle çarpımını başka bir satıra toplamak.

Tekrar anımsayalım ki bir satırı bir sabitle çarpmak, o satırın tüm girdilerini o sabitle çarpmak demektir. Bir satırı başka bir satıra toplamak, o satırın her girdisini diğer satırın karşılık gelen girdisine toplamak demektir.

Matrisler üzerinde satır işlemleri için kullandığımız gösterimleri de anımsayalım:

- **İki satırın yerini değiştirmek.** $R_i \leftrightarrow R_j$ **(*i*-inci satır ile *j*-inci satırın yerlerini değiştirmek)**
- **Bir satırı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak.** $cR_i \rightarrow R_i$ **(*i*-inci satırı sıfırdan farklı *c* sabiti ile çarpmak)**
- **Bir satırın bir sabitle çarpımını başka bir satıra toplamak.** $cR_i + R_j \rightarrow R_j$ **(*i*-inci satırı *c* sabiti ile çarpıp *j*-inci satıra toplamak)**

İlk dersimizde, basit bir örnek üzerinde, denklem sisteminin ilaveli matrisine herhangi bir satır işlemi uygulanınca elde edilen matrisin o sisteme denk olan bir doğrusal denklem sisteminin ilaveli matrisi olduğunu gözlemlemiştik. Bu gözlemden, bir denklem sistemini çözmek için, o sistemin ilaveli matrisine uygun satır işlemleri uygulanarak, karşılık gelen denklem sisteminin çözüm kümesinin hemen belirlenebileceği *basit* bir matris elde etmenin yararlı olacağı sonucunu çıkarmıştık. *Basit matris* ile ne söylenmek istendiğinin bu dersimizin konusu olacağını belirterek ilk dersimizi bitirmiştik.

1.2. İndirgenmiş Matrisler. Bir doğrusal denklem sistemini çözmek için o sistemin ilaveli matrisine bazı satır işlemleri uygulayarak ilaveli matrisi öyle bir matrise dönüştürmek istiyoruz ki, dönüştürülen matris, çözümünü kolayca belirleyebileceğimiz bir doğrusal denklem sisteminin ilaveli matrisi olsun. İşte ilk dersimizde *basit matris* ile söylenmek istenen bu idi. O halde, hangi matrisler çözüm kümesi kolayca belirlenebilecek bir doğrusal denklem sisteminin ilaveli matrisi olabilir? Şimdi vereceğimiz tanımı bu bağlamda değerlendiriniz.

Tanım 1. Aşağıdaki dört koşulu sağlayan matrise **indirgenmiş matris** denir:

1. Tüm girdileri sıfır olan tüm satırlar, sıfırdan farklı girdisi bulunan satırlardan sonra gelir.

2. Her satırın soldan itibaren sıfırdan farklı ilk girdisi 1 dir.

3. Bir satırın sıfırdan farklı ilk girdisinin bulunduğu sütundaki diğer girdilerin hepsi sıfırdır.

4. Bir satırın sıfırdan farklı ilk girdisinin bulunduğu sütun, kendisinden önceki satırın ilk girdisinin bulunduğu sütunun sağındadır.

Örnek 1. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ bir indirgenmiş matristir.

Örnek 2. $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{array}\right]$ indirgenmiş matris değildir.

Örnek 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ bir indirgenmiş matristir.

Örnek 4. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ bir indirgenmiş matris değildir.

Bir matris indirgenmiş matris değilse, tanımdaki koşullardan bazılarını sağlamıyor demektir. Örnek 2 deki matriste birinci satırının soldan itibaren ilk girdisi 2 olduğundan tanımdaki ikinci koşul sağlanmamaktadır. Bununla beraber, uygun bir satır işlemiyle, bu matrisi birinci satırının ilk girdisi 1 olan bir matrise dönüştürerek indirgenmiş olmaya daha yakın bir matris elde edebiliriz: iki satırın yerini değiştirmek gibi. Elde edilen matris yine de indirgenmiş matris değildir.

Şimdi, sözünü ettiğimiz matris üzerinde bazı satır işlemleri uygulayarak bir indirgenmiş matris elde edeceğiz. Her adımda uygulanan satır işleminin tanımdaki hangi koşul ile ilgili olduğunu görmeye çalışınız.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{5}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R_2+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Yukarıdaki örneklerden sonuncusu için de aynı şey geçerlidir:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1R_2+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_2+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{6}R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1R_3+R_2 \to R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_3+R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bir matris, farklı tür ve sırada satır işlemleri uygulanarak indirgenmiş matrise dönüştürülebilir, ancak sonunda elde edilen indirgenmiş matris aynıdır. Örneğin yukarıda indirgenmiş matrise dönüştürdüğümüz

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

matrisi için oradakilerden farklı satır işlemleri uygulayabilir ve aynı indirgenmiş matrise ulaşabiliriz:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{-1R_2+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{-1R_1+R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{2R_2+R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Siz de daha farklı yollar izleyerek indirgenmiş matrise ulaşabilirsiniz. Sonunda aynı indirgenmiş matrisi elde edersiniz.

Acaba her matris indirgenmiş biçime dönüştürülebilir mi? Bu sorunun yanıtı olumludur ve aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem. Her matris sonlu sayıda satır işlemi ile tek türlü belirli bir indirgenmiş matrise dönüştürülebilir.

Tanım 2. Bir matristen sonlu sayıda satır işlemi ile elde edilen tek türlü belirli indirgenmiş matrise o matrisin **indirgenmiş biçimi** denir.

Birkaç örnek verelim:

Örnek 5. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ bir indirgenmiş matristir; bu matris, $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{array}\right]$ in indirgenmiş biçimidir.

Örnek 6. $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$ matrisi indirgenmiş matris değildir; bu matrisin indirgenmiş biçimi $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ matrisidir.

Örnek 7. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$ matrisi indirgenmiş matris değildir. Bu matrisin indirgenmiş biçimi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 12 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En sonda elde edilen matris indirgenmiş biçimdedir. Bu matrisi elde etmek için uygulanan satır işlemleri sırasıyla şöyledir: ilk adımda, birinci satır 2 ile çarpılıp ikinci satıra, sonra da -4 ile çarpılıp üçüncü satıra toplanmıştır; ikinci adımda, ikinci satır -1 ile çarpılmıştır; son adımda, ikinci satır -1 ile çarpılıp birinci satıra toplanmıştır. Kuşkusuz, daha farklı satır işlemleri ile de aynı sonuca ulaşılabilir.

Örnek 8. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & 12 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin indirgenmiş biçimini bulalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & 12 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 6 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -6 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En sondaki matris, verilen matrisin indirgenmiş biçimidir.

1.3. Gauss - Jordan Yoketme Yöntemi. İndirgenmiş matris kavramına denklem sistemlerinin çözümünü tartışırken vardığımızı unutmayınız. İndirgenmiş biçimde bir ilaveli matrise sahip olan bir denklem sisteminin çözüm kümesini belirlemek çok kolaydır.

Örnek 1. Aşağıdaki tabloda, ilaveli matrisi indirgenmiş matris olan denklem sistemleri ve bunların çözüm kümeleri verilmiştir. Çözüm kümelerinin nasıl yazıldığı üzerinde düşününüz. Konu içinde ilerledikçe bu çözüm kümelerinin nasıl yazıldığını daha iyi anlayacaksınız.

İlaveli Matris	**Sistem**	**Çözüm kümesi**
$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x \quad = 3 \\ \quad y = 2 \end{cases}$	Ç={(3,2)}
$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x \quad = 3 \\ \quad 0 = 0 \end{cases}$	Ç={(3 , t) : t∈R}
$\left[\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 \quad - 3x_3 = -2 \\ \quad x_2 - 6x_3 = 4 \\ \quad\quad 0 = 0 \end{cases}$	Ç={(-2+3t , 4+6t , t) : t∈R}
$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ \quad\quad 0 = 1 \end{cases}$	$Ç = \varnothing$

Diğer yandan, bir denklem sisteminin ilaveli matrisi indirgenmiş biçime getirilirken her adımda, karşılık gelen denklem sistemi başlangıçtaki denklem sistemine denk olan bir sistemin ilaveli matrisi elde edilir. Dolayısıyla, bir denklem sistemi, ilaveli matrisinin indirgenmiş biçimine karşılık gelen denklem sistemine denktir, yani o sistemle aynı çözüm kümesine sahiptir. Böylece, bir doğrusal denklem sistemini çözmek için o sistemin ilaveli matrisinin indirgenmiş biçimini bulmak önem kazanmaktadır. Denklem sistemlerini bu yolla çözmeye **Gauss-Jordan yoketme yöntemi** denir.

Tanım 1. Eğer bir matrisin bir satırının tüm girdileri sıfır ise, o satıra **sıfır satır**ı denir. En az bir girdisi sıfırdan farklı olan satıra **sıfırdan farlı satır** denir.

Bu tanımlar, bundan sonrası için, ifade kolaylığı sağlayacaktır.

Gauss-Jordan yoketme yönteminde bir doğrusal denklem sistemini çözmek için, sistemin ilaveli matrisi, indirgenmiş biçime getirilir ve aşağıdaki durumlara göre çözüm kümesi belirlenir.

1. İndirgenmiş biçimde $(0\ ,0\ ,\ ...\ ,0\ |\ 1)$ satırı varsa, sistemin çözümü yoktur.

2. İndirgenmiş biçimde $(0\ ,0\ ,\ ...\ ,0\ |\ 1)$ satırı yok ve sütun sayısı sıfırdan farklı satır sayısından bir fazla ise, sistemin tek bir çözümü vardır.

3. İndirgenmiş biçimde $(0\ ,0\ ,\ ...\ ,0\ |\ 1)$ satırı yok ve sütun sayısı sıfırdan farklı satır sayısından en az iki fazla ise, sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır. *Eğer sütun sayısı, sıfırdan farklı satır sayısından r fazla ise, sistem için r -1 parametreye bağlı bir genel çözüm yazılabilir.*

Örnek 2. Eğer bir denklem sisteminin ilaveli matrisinin indirgenmiş biçimi $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ise, bu sistemin hiç çözümü yoktur, çünkü son satır $(0\ ,0\ ,0\ |\ 1)$ dir ve bu satıra karşılık gelen denklem $0 = 1$ dir.

Örnek 3. Eğer bir denklem sisteminin ilaveli matrisinin indirgenmiş biçimi $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ ise, bu sistemin tek bir çözümü vardır, çünkü $(0\ ,0\ ,0\ |\ 1)$ biçiminde bir satır yoktur ve sütun sayısı, sıfırdan farklı satır sayısından bir fazladır. Bu matrise karşılık gelen sistem yazılırsa tek çözümün ne olduğu görülür.

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad = 3 \\ \qquad x_2 \quad = 4 \\ \qquad\quad x_3 = 1 \end{cases} \quad ; \quad \text{çözüm kümesi} \quad Ç = \{(3\ ,4\ ,1)\} \text{ dir.}$$

Örnek 4. Eğer bir denklem sisteminin ilaveli matrisinin indirgenmiş biçimi $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ ise, bu sistemin sonsuz çoklukta çözümü vardır, çünkü $(0\ ,0\ ,0\ |\ 1)$ biçiminde bir satır yoktur ve sütun sayısı, sıfırdan farklı satır sayısından iki fazladır. Bu matrise karşılık gelen sistem yazılırsa çözüm kümesinin ne olduğu görülür.

$$\begin{cases} x_1 \qquad + 2x_3 = 3 \\ \qquad x_2 - x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 2x_3 \\ x_2 = 4 + x_3 \end{cases} \quad ; \quad \text{çözüm kümesi} \quad Ç = \{(3\text{-}2t\ ,4\text{+}t\ ,t) : t \in \mathbf{R}\} \text{ dir.}$$

Örnek 5. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ denklem sistemini Gauss-Jordan yoketme yöntemi ile çözelim. Sistemin ilaveli matrisini yazıp indirgenmiş biçimini bulacağız.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Son matristen, çözüm kümesi, *Ç* = {(1 , 1 , 5)} olarak elde edilir.

Örnek 6. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ sistemini Gauss-Jordan yoketme yöntemi ile çözelim.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.7 & 0.7 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.1 & 2.1 \\ 0 & 1 & -0.7 & 0.7 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Son matristen, çözüm kümesi, *Ç* = {(2 , 0 , -1)} olarak elde edilir.

Örnek 7. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$ denklem sistemini Gauss-Jordan yoketme yöntemi ile çözelim.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 1 & -4 \\ 4 & -8 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Son matristen, çözüm kümesi, $Ç = \varnothing$ olarak elde edilir.

Örnek 8. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 10 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases}$ denklem sistemini Gauss-Jordan yoketme yöntemi ile çözelim.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & -9 & 15 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \\ -2 & -3 & 4 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \\ -2 & -3 & 4 & -6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Son matristen,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -3 \\ x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - x_3 \\ x_2 = 4 + 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - t \\ x_2 = 4 + 2t \\ x_3 = t \end{cases}$$

ve böylece çözüm kümesi $Ç = \{(-3-t\,,\, 4+2t\,,\, t) : t \in R\}$ olarak elde edilir

.

Örnek 9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_5 = -2 \end{cases}$ denklem sistemini Gauss-Jordan yoketme yöntemi ile çözelim.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Son matristen,

$$\begin{cases} x_1 \quad -2x_3 \quad -3x_5 = 7 \\ x_2 + 3x_3 \quad + 2x_5 = -3 \\ x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 + 2x_3 + 3x_5 \\ x_2 = -3 - 3x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 2x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 7 + 2s + 3t \\ x_2 = -3 - 3s - 2t \\ x_3 = s \\ x_4 = 2t \\ x_5 = t \end{cases}$$

ve böylece çözüm kümesi $Ç = \{(7+2s+3t\ ,\ -3-3s-2t\ ,\ s\ ,\ 2t\ ,\ t) : s\ ,\ t \in \mathrm{R}\}$ olarak elde edilir.

Bazı durumlarda katsayıları aynı fakat sağ taraf sabitleri farklı olan çok sayıda doğrusal denklem sistemini çözmemiz gerekebilir. Böyle durumlarda Gauss-Jordan yoketme yöntemi tüm sistemlere aynı anda uygulanabilir. Aşağıda bu duruma bir örnek veriyoruz:

Örnek 10. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ denklem sistemlerini aynı anda çözelim.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & -5 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & -5 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 11 & 21 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 9 & 11 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 11 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 11 & 13 & 25 \\ 0 & 1 & -2 & -9 & -11 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 11 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 11 \end{array}\right]$$

Çözüm kümeleri, sırasıyla, $Ç$ = {(1 , 1 , 5)} , $Ç$ = {(5 ,-3 , 4)} , $Ç$ = {(3 , 1 , 11)} .

1.4. Problemler. Daha önce de gördüğümüz üzere, günlük yaşamda karşılaşılan problemlerden pek çoğu matematişksel olarak doğrusal denklem sistemleri ile modellenip çözülebilir. Aşağıda , bu duruma birkaç örnek daha vereceğiz.

Problem 1(Eski Çin'den bir Problem). Bir çiftlikte üretilen pirinç üç farklı boyda torbalara doldurularak paketleniyor: büyük boy, küçük boy ve orta boy torbalar. 3 tane büyük boy torba, 2 tane küçük boy torba ve 1 tane orta boy torba birlikte tartılınca 40 kg; 2 tane büyük boy torba, 3 tane küçük boy torba ve 1 tane orta boy torba birlikte tartılınca 30 kg geliyor. Benzer şekilde, 1 tane büyük boy torba, 2 tane küçük boy torba ve 3 tane orta boy torba birlikte tartılınca 28 kg geliyor. Her tür torbada kaçar kg pirinç bulunduğunu belirleyiniz.

Çözüm. 1 büyük boy torbada x kg , 1 küçük boy torbada y kg ve 1 orta boy torbada z kg pirinç bulunduğunu kabul edelim. Problemdeki koşulların aşağıdaki denklem sistemini vereceği açıktır.

$$\begin{cases} 3x+2y+\ z=40 \\ 2x+3y+\ z=30 \\ \ x+2y+3z=28 \end{cases}.$$

Bu sistemin ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 40 \\ 2 & 3 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 3 & 28 \end{array}\right]$$

dir. İlaveli matrisin indirgenmiş biçimini bulalım.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 40 \\ 2 & 3 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 3 & 28 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -8 & -44 \\ 0 & -1 & -5 & -26 \\ 1 & 2 & 3 & 28 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 28 \\ 0 & 1 & 5 & 26 \\ 0 & -4 & -8 & -44 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & 26 \\ 0 & 0 & 12 & 60 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -24 \\ 0 & 1 & 5 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Böylece, çözüm kümesi $Ç = \{(11 , 1 , 5)\}$ dir. Dolayısıyla, 1 büyük boy torbada 11 kg , 1 küçük boy torbada 1 kg ve 1 orta boy torbada 5 kg pirinç vardır.

Problem 2(2004 ÖSS Sorusu). Aslı, Hakan ve Tolga'nın bugünkü yaşları toplamı 72 dir. Aslı Hakan'ın bugünkü yaşına geldiğinde, Tolga'nın yaşı da Hakan'ın yaşının iki katı olacaktır. Buna göre, Hakan'ın bugünkü yaşı kaçtır?

Çözüm. Aslı, Hakan ve Tolga'nın bugünkü yaşları, sırasıyla, x_1 , x_2 , x_3 olsun. Verilenlerden, $x_1 + x_2 + x_3 = 72$; $x_3+(x_2 - x_1) = 2(x_2 + (x_2 - x_1))$ olur. Böylece

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + x_3 = 72 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Problemin çözümünü elde etmek için, ikinci denklem (-1) ile çarpılıp birinci denkleme toplanır ve $4x_2 = 72, x_2 = 18$ elde edilir. Yani, Hakan'ın bugünkü yaşı 18 dir. Sistemin Gauss-Jordan Eliminasyon Yöntemi ile çözümü aşağıda verilmiştir:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72 \\ 0 & -4 & 0 & -72 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 72 \\ 0 & 1 & 0 & 18 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 54 \\ 0 & 1 & 0 & 18 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 54 \\ \quad x_2 \quad = 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 \quad = 54 - t \\ x_2 \quad = 18 \\ x_3 = t \end{cases} ,$$

çözüm kümesi $Ç = \{(54\text{-}t , 18 , t) : 1 \le t \le 17\}$.

Aslı, Hakan ve Tolga'nın yaşlarının tamsayı olduğuna ve küçükten büyüğe sıralı verildiğine dikkat ediniz. Çözümden, Aslı ve Tolga'nın yaşlarının değişik değerler alabildiği; ancak Hakan'ın yaşının sadece 18 değerini aldığı görülüyor.

Problem 3. 36 bin YTL nin bir kısmı A-bank'a, bir kısmı B-bank'a ve geri kalan kısmı da C-bank'a yatırılıyor. A-bank ve B-bank'a yatırılan toplam miktar, C-bank'a yatırılan miktardan 6 bin YTL fazla; A-bank ve C-bank'a yatırılan toplam miktar ise, B-bank'a yatırılan miktarın iki katından 3 bin YTL eksiktir. Her bir bankaya kaç YTL yatırılmıştır?

Çözüm. A-bank'a yatırılan miktar x, B-bank'a yatırılan miktar y ve C-bank'a yatırılan miktar z bin YTL olsun. Problemde verilenlerden

$$x+y+z=36 \quad , \quad x+y=z+6 \quad , \quad x+z=2y-3$$

denklemleri elde ediklir. Dolayısıyla, problemimizin çözümü

$$\begin{cases} x+\ \ y+z=36 \\ x+\ \ y-z=\ 6 \\ x-2y+z=-3 \end{cases}$$

denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Gauss-Jordan eliminasyon yöntemi ile,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & -2 & -30 \\ 0 & -3 & 0 & -39 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right].$$

Böylece, çözüm kümesi, Ç = {(8, 13, 15)}dir. A-bank'a 8 bin YTL, B-bank'a 13 bin YTL, C-bank'a 15 bin YTL yatırılmıştır.

Problemler 2

1. $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & -8 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \end{array}\right]$ matrisi için aşağıda verilen satır işlemlerini yapınız:

a) $R_1 \leftrightarrow R_2$ **b)** $\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2$ **c)** $-2R_1 \rightarrow R_1$

ç) $2R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ **d)** $-2R_3 + R_2 \rightarrow R_2$ **e)** $\frac{1}{2}R_2 + R_1 \rightarrow R_1$

2. Aşağıdaki matrislerin indirgenmiş biçimlerini bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1/3 \end{bmatrix}$

3. Aşağıda verilen indirgenmiş ilaveli matrislerin her birine karşılık gelen denklem sistemini ve sistemin çözüm kümesini yazınız.

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ **b)** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ **c)** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ **ç)** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ **e)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ **f)** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ **g)** $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$

4. Aşağıdaki denklem sistemlerini ilaveli matris kullanarak çözünüz.

a) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -2 \\ -2x_1 + x_2 = -3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -8 \\ 2x_1 + x_2 = 8 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$

5. Aşağıdaki denklem sistemlerini Gauss - Jordan yoketme yöntemi ile çözünüz.

a) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 = -2 \\ 3x_1 + 9x_2 - 21x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - x_3 = -18 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$

6. Aşağıdaki denklem sistemlerini Gauss - Jordan yoketme yöntemi ile çözünüz.

a) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 7 \\ -4x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 6 \\ 6x_1 - 15x_2 - x_3 = -19 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

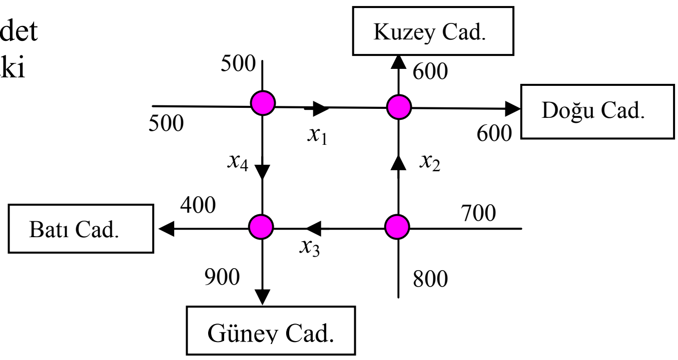
7. Aşağıdaki denklem sistemlerini katsayılarının aynı olduğuna dikkât ederek çözünüz.

a) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 13 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

8. Bir taşıma şirketi, toplam 250 ton kapasiteli bir filoya sahip olmak için 24 adet kamyon satın almak istiyor. Alınması düşünülen kamyonlar, 6 , 8 ve 18 tonluk üç farklı modelden oluşmaktadır. Bu modellerden her birinden kaç adet kamyon alınması uygun olur? Şirket, kamyonlardan 9 tanesini 18 tonluk modellerden alarak bu işlemi gerçekleştirebilir mi?

9. Bir hava yolu şirketi, toplam 960 yolcu kapasiteli bir filoya sahip olmak için 30 adet uçak satın alacaktır. Alınması düşünülen uçaklar, 18, 24 ve 42 yolcu kapasiteli üç farklı modelden oluşmaktadır. Bu modellerden her birinden kaç adet uçak alınması uygun olur?

10. Büyük bir şehrin merkezinde dört adet tek-yön caddeden oluşan bir yol ağındaki trafik akışı, yandaki şekilde verilmiştir. Her bir caddenin ucunda ve sonundaki sayılar, o caddeye bir saatta giren ve çıkan araç sayısını göstermektedir. x_1 , x_2 , x_3 ve x_4 değişkenlerinden her biri, her bir kavşakta, ok yönünde bir saatta giden araç sayısını göstermektedir.



a) Düzgün bir trafik akışında, bir saat boyunca bir kavşağa giren araç sayısı, o kavşaktan çıkan araç sayısına eşit olur. Örneğin, Doğu-Güney kavşağına giren araç sayısı 1000, çıkan araç sayıası $x_1 + x_4$ tür; dolayısıyla, $x_1 + x_4 = 1000$ dir. Diğer üç kavşak için de benzer denklemler yazarak düzgün bir trafik akışında sağlanması gereken doğrusal denklem sistemini bulunuz.
b) Önceki şıkta bulduğunuz denklem sistemini çözünüz.
c) Doğu-Güney kavşağından Doğu Caddesi boyunca Doğu-Kuzey kavşağına saatta en çok kaç araç gidebilir? En az kaç araç gidebilir?
d) Trafik ışıkları, Doğu-Güney kavşağından Batı-Güney kavşağına saatta 200 araç gidecek şekilde ayarlanmışsa, her bir kavşaktan her bir yöne saatta kaç araç gittiğini belirleyiniz.